Economies d’énergie et forme des bâtiments. L’analyse morpho-énergétique

P. DEPECKER, J. BRAU, J.M. PALLIER

Article publié dans la Revue CVC,
Septembre 1981

I. — LES BASES THÉORIQUES DE L'ANALYSE MORPHOLOGIQUE

1. — L'expression de la consommation d'énergie d'un bâtiment

Le besoin énergétique B d'un bâtiment s'exprime par la relation :

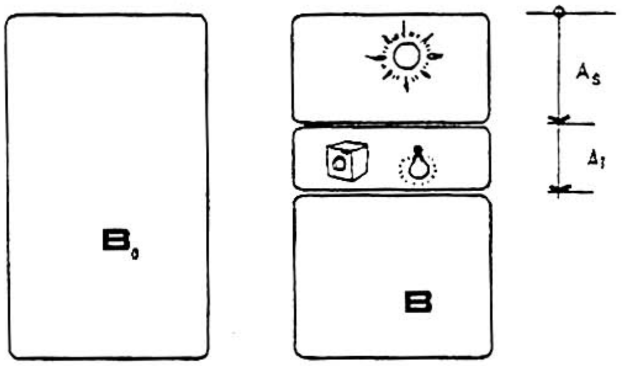
$$B = B_o - (A_i + A_s)$$

dans laquelle :

B_o représente le besoin dit « de base » évalué sans tenir compte des chaleurs gratuites, solaires ou autres (métabolismes, électroménager, etc.).

A_i sont les apports internes (métabolismes, électro-ménager, etc.).

A_s sont les apports solaires.



L'étude détaillée des expressions de A_i et A_s sera l'objet des développements suivants. Indiquons tout de même que A_i et A_s sont des fonctions complexes de divers paramètres tels que l'inertie, l'orientation, le niveau isolatif du bâtiment, le climat, le système de chauffage et sa régulation, les systèmes récupérateurs, etc. Dans un premier temps, nous nous contenterons de raisonner globalement sur les paramètres les plus importants apparaissant dans B_o, A_i et A_s.

2. — L'étude simplifiée

Notre préoccupation est de réduire le besoin B. Si nous n'entrons pas dans une analyse très fine et que nous laissions de côté les quantités A_i et A_s (en admettant par exemple que l'action sur A_i et A_s n'est pas de nature morphologique), abaisser la valeur de B se traduit par une réduction de B_o :

$$B \searrow \Leftrightarrow B_o \searrow \text{ et } (A_i + A_s) \nearrow$$

Explicitons B_o :

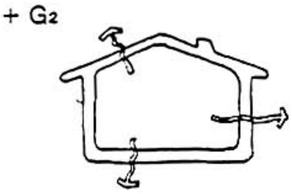
$$B_o = \alpha . G$$

où α est une constante caractérisant le climat et le volume à chauffer.

Nous savons aussi que G peut se décomposer simplement en :

$$G = G_1 + G_2$$

où G_1 représente la déperdition volumique due à la transmission de chaleur au travers des parois ($W/m^3.°C$).



et G_2 représente la déperdition volumique due au renouvellement de l'air ($W/m^3.°C$).

Le renouvellement de l'air étant une préoccupation de nature hygiénique et économique dont nous parlons par ailleurs, nous ne le considérerons pas comme un paramètre pertinent de notre problème morphologique. Ainsi G peut s'écrire :

$$G = G_1 + \text{cste}$$

De proche en proche, nous constatons que réduire le besoin nous amène à réduire la valeur de G_1

$$B \searrow \Leftrightarrow G_1 \searrow$$

Explicitons G_1 :

$$G_1 = \frac{1}{V}[\underbrace{\Sigma KS}_{\text{déperditions surfaciques}} + \underbrace{\Sigma kL}_{\text{déperditions linéiques}}]$$

où V est le volume à chauffer (souvent égal au volume habitable) ; nous pouvons aussi écrire, en introduisant la surface d'enveloppe S_E :

$$G_1 = \frac{\Sigma KS + \Sigma kL}{S_E} . \frac{S_E}{V}$$

en faisant apparaître deux paramètres de conception importants :

- d'une part, le coefficient de transmission thermique moyen de l'enveloppe $\bar{K}_E$:

$$\bar{K}_E = \frac{\Sigma KS + \Sigma kL}{S_E}$$

qui est représentatif du niveau isolatif de l'enveloppe, en intégrant ses petits défauts (les déperditions linéiques).

- d'autre part le coefficient de forme C_f :

$$C_f = \frac{S_E}{V}$$

Ce coefficient est directement fonction de la volumétrie, en qualité et quantité ; c'est-à-dire qu'il caractérise les différentes formes mais aussi la taille de ces formes. Par exemple, un cube et un parallélépipède n'auront pas le même coefficient de forme (nature des volumes), mais il en sera de même pour deux cubes de dimensions différentes (taille des volumes).

G_1 peut donc maintenant s'écrire :

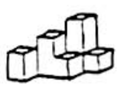
$$G_1 = \bar{K}_E . C_f$$

Nous sommes donc parvenus à séparer deux variables fondamentales :

— le niveau isolatif
— la morphologie

pertes de chaleur par transmission au travers de l'enveloppe
↓
deux actions possibles sur G_1
↓ niveau isolatif — ↓ morphologie

($\bar{K}_E$)



(C_f)

En fait, nous verrons plus loin que $\overline{K}_E$ et C_f ne sont pas véritablement des paramètres indépendants.

Si nous exploitons directement cette loi, nous aboutissons à une conclusion aussi simple qu'immédiate vis-à-vis de la question morphologique : réduire le besoin conduit à rechercher des formes de bâtiments dont le C_f est le plus petit possible.

(Nous laissons provisoirement de côté l'action sur $\overline{K}_E$. Mais il est aisé de constater que, pour diminuer G_1, on pourra augmenter le niveau isolatif, c'est-à-dire abaisser la valeur de $\overline{K}_E$).

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Réduire la}\\ \text{consommation}\\ \text{d'énergie}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Réduire}\\ C_f\end{array}\right\}$$

Signalons tout de suite que cette réponse est très imparfaite : cela tient à la simplification imposée dans cette première analyse dont l'intérêt est essentiellement de permettre une bonne progression pédagogique.

Mais qu'est-ce qu'un coefficient de forme faible ? par rapport à quoi ? Faisons plus ample connaissance avec cet « indice morphologique ».

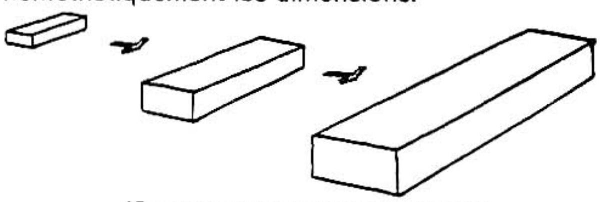
3. — Le coefficient de forme C_f

L'étude du coefficient de forme défini comme le rapport de la surface d'enveloppe au volume du bâtiment (m²/m³) :

$$C_f = \frac{S_E}{V}$$

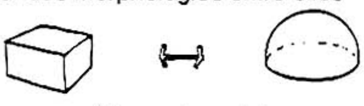
peut s'aborder à deux niveaux.

- Considérer une morphologie et en faire varier homothétiquement les dimensions.



(S_E et V varient simultanément)

- Comparer des morphologies entre elles



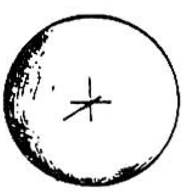
(S_E seule varie)

Dans ce deuxième cas, comparer des bâtiments revient à étudier des volumes aux morphologies diverses mais présentant par ailleurs les mêmes surfaces de planchers (ce qui ne signifie pas du tout « mêmes performances d'habitabilité »), c'est-à-dire le même volume habitable.

L'étude du coefficient de forme C_f se ramène alors à l'étude de la surface d'enveloppe.

3.1. — Analyse sur morphologie unique de quelques volumes à géométrie simple

3.1.1. — LA SPHÈRE

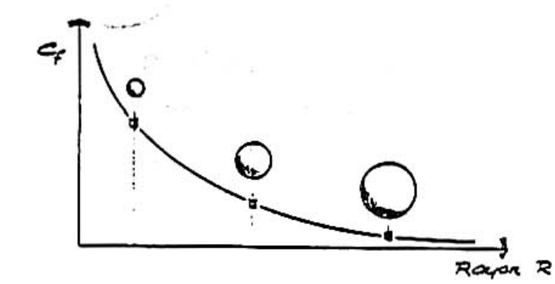


$$S_E = 4\,\pi\,R^2$$

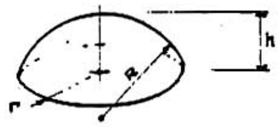
$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

$$\boxed{\text{Sphère } C_f = 3/R}$$

Le coefficient de forme est donc inversement proportionnel au rayon. Plus R est grand, plus C_f est faible et donc, a priori, avantageux.



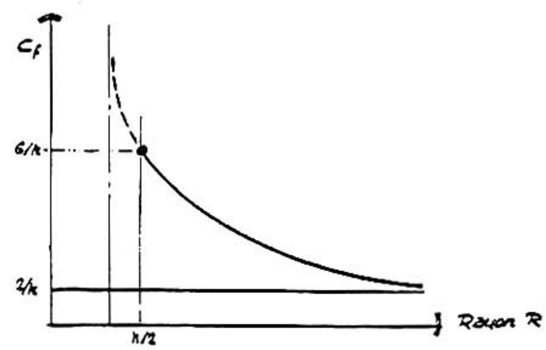
3.1.2. — LA CALOTTE SPHÉRIQUE



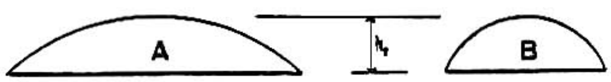
$$S_E = 2\,\pi\,Rh = \pi\,(r^2 + h^2)$$

$$V = \pi\,h\left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6}\right) = \pi\,h^2\,(R - h/3)$$

$$\boxed{\text{calotte sphérique} \quad C_f = \frac{2R}{h\,(R - h/3)}}$$



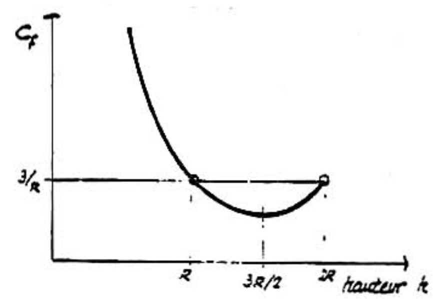
Pour h_o donné, le coefficient de forme est d'autant plus intéressant (plus faible) que R est grand.



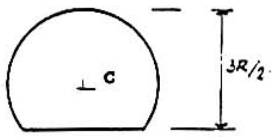
A Meilleur que B

$C_f\,(A) < C_f\,(B)$

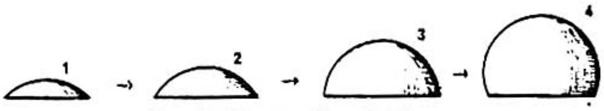
Si l'on fait l'étude $C_f = C_f\,(h)$ pour R fixé, on constate qu'il existe une valeur optimale de la hauteur ($h_{opt} = 3R/2$) pour laquelle le coefficient de forme est minimal.



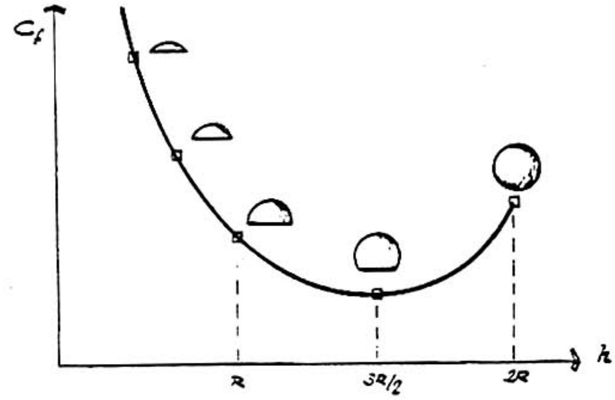
A et B ont le même C_f



C possède le C_f minimum



$C_{f(1)} > C_{f(2)} > C_{f(3)} > C_{f(4)}$

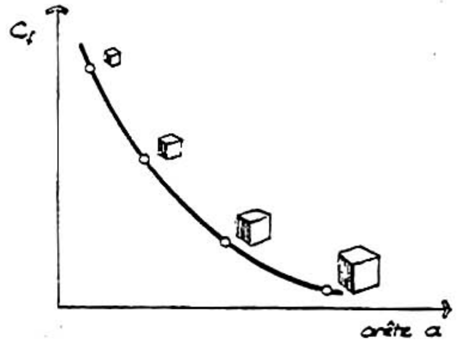


3.1.3. — LE CUBE

$S_E = 5a^2 \quad V = a^3$

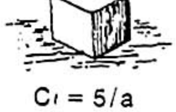
$C_f = 5\,a^2/a^3$

$$\boxed{C_f = 5/a}$$

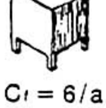


On peut parfois considérer que le bâtiment présente une sixième face en contact avec l'extérieur (vide sanitaire, cube en surplomb...) le coefficient de forme vaut alors :

$$C_f = \frac{6}{a}$$

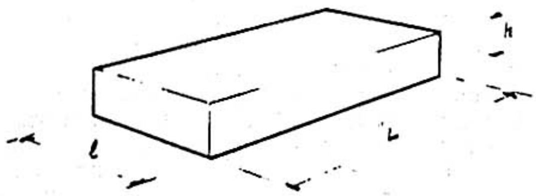


$C_f = 5/a$



$C_f = 6/a$

3.1.4. — LE PARALLÉLÉPIPÈDE



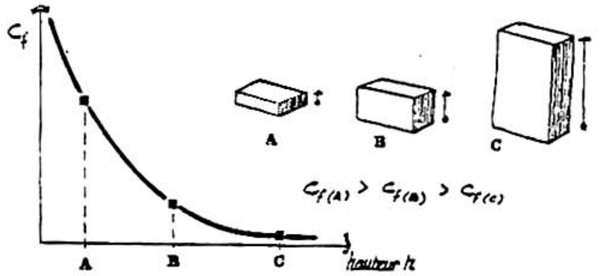
$S_E = 2h\,(L + l) + Ll$

$V = Llh$

$$\boxed{C_f = \frac{2\,(L + l)}{Ll} + \frac{1}{h}}$$

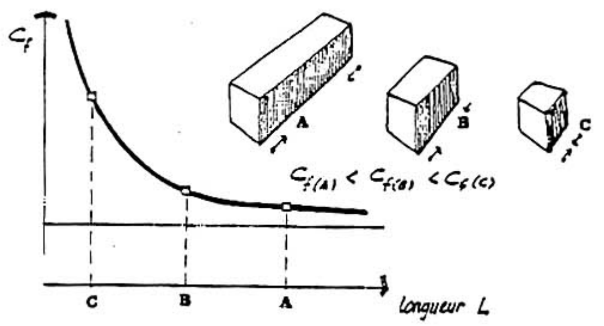
• Variation de C_f avec la hauteur du bâtiment h (L et l sont fixés) :

$$C_f\,(h) = \frac{1}{h} + \text{Cte}$$



• Variation de C_f avec la longueur L ou la largeur l (l ou L et h sont fixés) :

$$C_f\,(L) = \frac{2}{L} + \text{Cte}$$



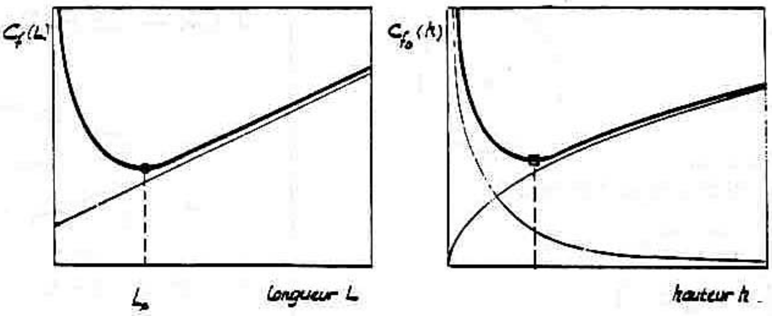
• Variations de C_f lorsque V = Cte (à volume habitable ou surface de plancher équivalent)

$$\left.\begin{array}{l} V = Llh = \text{cte} \\ C_f = 2\,\dfrac{(L + l)}{Ll} + \dfrac{1}{h} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad C_f\,(L, h) = \frac{2Lh}{V} + \frac{2}{L} + \frac{1}{h}$$

Quel est alors le parallélépipède présentant le coefficient de forme minimum ?

On peut montrer facilement que $\delta C_f / \delta L = 0$ pour $L = \sqrt{V}/\sqrt{h} = L_0$

Il s'agit ensuite de rechercher le minimum de la fonction $C_{f0} = C_{f0}(h) = C_f\,(L_0, h)$



On détermine ainsi $C_{f\,min}$:

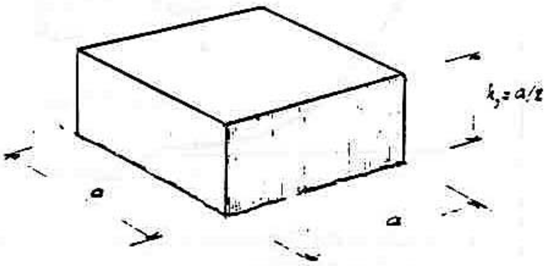
$$C_{f\,min.} = 3\sqrt[3]{\frac{4}{V}}$$

qui correspond à un parallélépipède de base carrée d'arête *a* et de hauteur *h* telles que :

$$a = L_o = l_o = \sqrt[3]{2V} \qquad , \ h_o = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

soit une relation entre arête et hauteur optimale de :

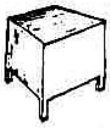
$$h_o = L/2$$



Si le parallélépipède présente une face inférieure, on montre que :

$$a' = L'_o = h'_o = l'_o\sqrt[3]{V}$$

(il s'agit du cube) et



$$C'_{f\,min} = 6/\sqrt[3]{V} = 1{,}26\ C_{f\,min.}$$

$C_{f,\,min}$ peut être compris, en représentation graphique, comme le point le plus bas d'une surface gauche engendrée par la fonction C_f de deux variables, l et h ou encore L et h. En effet, C_f est explicitement fonction de trois grandeurs qui sont l, L et h. Mais ces trois valeurs sont liées par la relation

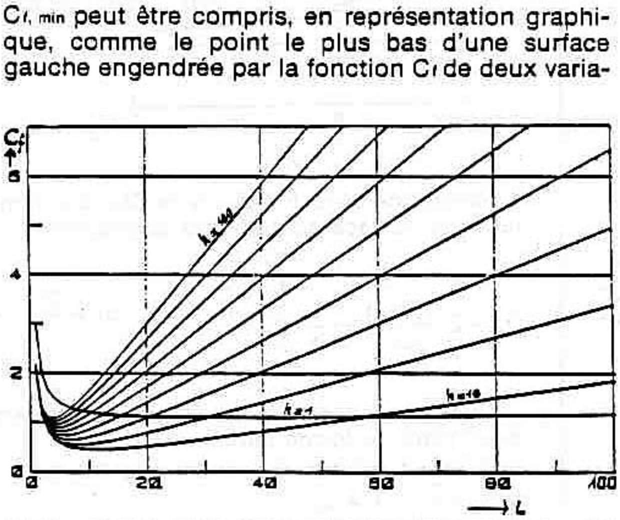


Fig. 1. — Variations du coefficient de forme C_f avec la longueur du bâtiment L, h étant fixé.

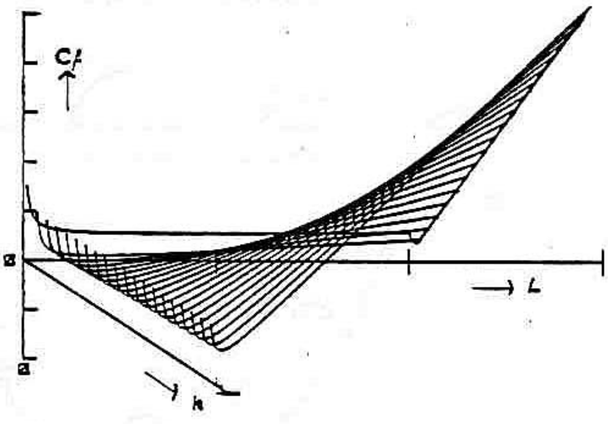


Fig. 2. — Variations du coefficient de forme C_f avec la longueur et la hauteur du bâtiment - fonction C_f (L, h).

$$V = cte = lLh$$

C_f n'est donc fonction que de deux variables réelles, groupées au choix. La figure 2 montre la configuration du voile C_f (L, h). Les courbes tracées sont les intersections du voile avec le plan vertical d'abscisse h.

La figure 1 représente la projection de toutes ces intersections sur le plan vertical. Il s'agit donc des diagrammes des fonctions C_f (L).

Exemple

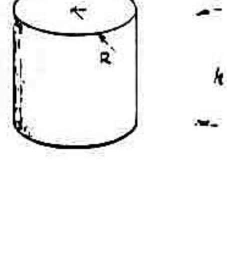
Considérons un bâtiment de 1 260 m³ de volume.

Son coefficient de forme minimal sera obtenu pour :

$$L = l = (2 \times 1260)^{1/3} = 13{,}60 \text{ m}$$
$$\text{et } h = L/2 = 6{,}80 \text{ m}$$

On obtient alors $C_{f\,min.} = 0{,}44$

3.1.5. — LE CYLINDRE



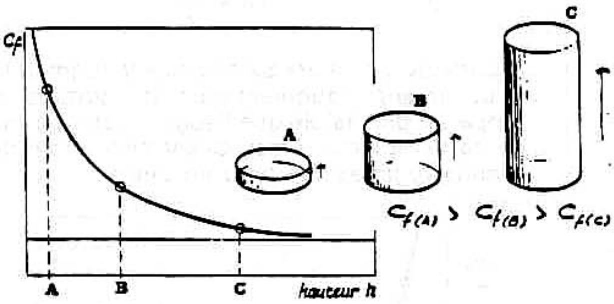
$$S_E = 2\pi Rh + \pi R^2$$

$$V = \pi R^2 h$$

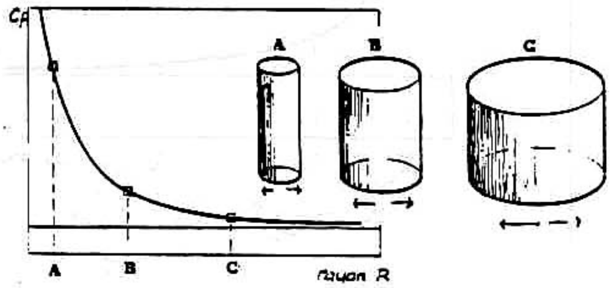
$$\boxed{C_f = \frac{2}{R} + \frac{1}{h}}$$

- Variation de C_f avec la hauteur du bâtiment (R est fixé).

$$C_f(h) = \frac{1}{h} + \text{Cte}$$



- Variation de C_f avec le rayon de la base circulaire du bâtiment (h est fixé).



- Variation de C_f lorsque V = Cte

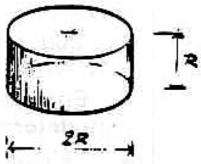
$$\left.\begin{aligned} V &= \pi R^2 h \\ C_f &= \frac{2}{R} + \frac{1}{h} \end{aligned}\right\} \longrightarrow C_f(h) = \frac{1}{h} + \frac{2}{}\sqrt{\frac{\pi h}{V}}$$

Quel est le cylindre présentant le coefficient de forme minimal ?

Recherchons le minimum de $C_f(h)$:

$\delta C_f(h) / \delta h = 0 \rightarrow h_0$

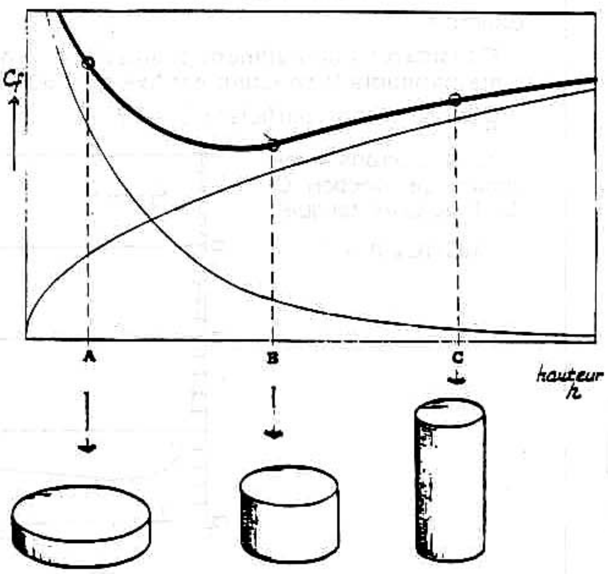
dont on déduit



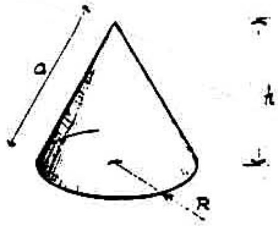
$$C_{f.\,min} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}$$

pour $h_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ et $R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

C'est-à-dire $R_0 = h_0$



3.1.6. — LE CÔNE

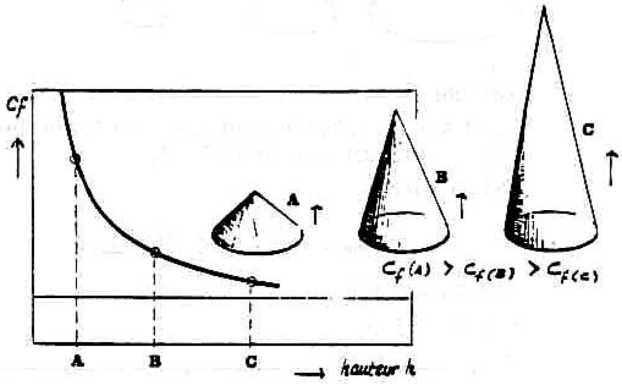


$$S_E = \pi R a = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

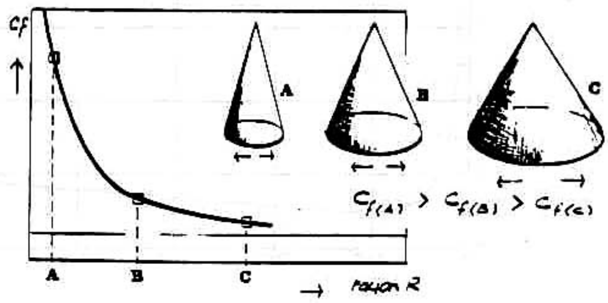
$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

$$\boxed{C_f = 3\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}}}$$

- Variation de C_f avec la hauteur h du bâtiment (R est fixé)



- Variation de C_f avec le rayon R de la base (h fixée)



- Variation de C_f lorsque V = Cte

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} R^2 h \\ C_f &= 3\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow C_f(h) = 3\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{\pi h}{3V}}$$

Quel est le cône présentant le coefficient de forme minimal ?

Faisons $\delta C_f / \delta h = 0$ et l'on obtient :

$$C_{f.\,min} = 4{,}19 / \sqrt[3]{V}$$

pour $h_0 = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ et $R_0 = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$, soit un rapport entre h_0 et R_0 de $h_0 = \frac{1{,}61}{\sqrt[3]{V}} \cdot R_0$

On obtient $C_{f.\,min} = 0{,}48$

correspondant aux valeurs suivantes de L, l, et α

$$L = 12{,}5\ m \qquad l = 18{,}7\ m \qquad \alpha = 30°$$

$C_{f.\,min}$ peut être considéré comme la coordonnée du point bas d'un voile représentant les variations de la fonction de deux variables réelles et positives $C_f\,(l,\,L)$ ou bien $C_f\,(l,\,\alpha)$ ou encore $C_f\,(L,\,\alpha)$.

Deux de ces voiles sont représentés aux figures 3 et 4.

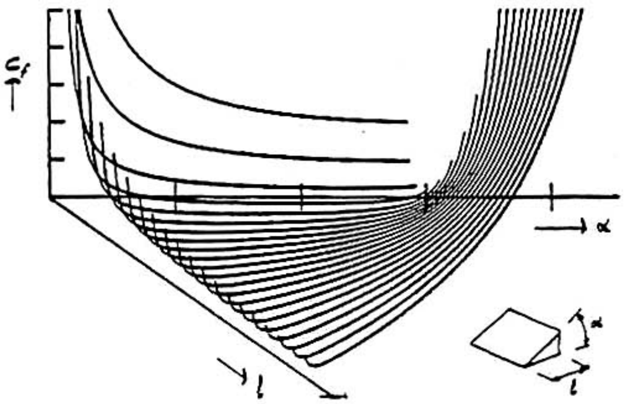


Fig. 3. — Variations du coefficient de forme avec l'angle d'ouverture et la largeur de la base l — fonction $C_f\,(l,\,\alpha)$.

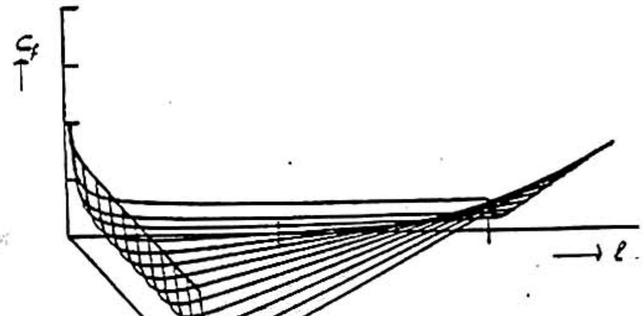


Fig. 4. — Variations du coefficient de la forme avec la largeur de la base l et la longueur L — Fonction $C_f\,(l,\,L)$.

3.2. — Analyse comparative des morphologies

Comme nous l'avons indiqué plus haut, cet aspect de l'étude ne présente d'intérêt que si nous comparons des bâtiments dont les volumes habitables sont équivalents. Et il est important de préciser ici que la qualité du milieu physique (chaleur, lumière, bruit) sera très variable d'une volumétrie à l'autre. Il faut donc être conscient de la complexité du problème et nuancer les résultats.

Pour illustrer cette question, il suffit de remarquer que l'aménagement, la qualité des espaces et les ambiances physiques d'un bâtiment épais sont presque toujours très différents de ceux d'un bâtiment mince.

Considérons un volume habitable (à chauffer) V. Ce volume peut être morcelé en éléments de hauteur h fixée (hauteur libre sans plafond) et de surface S de plancher, on a la relation simple :

$$V = S.h$$

Étudions maintenant, à partir de l'hypothèse V = cste, plusieurs morphologies et comparons leurs coefficients de forme $C_f = S_E/V$, c'est-à-dire leur surface d'enveloppe.

Dans un premier temps, voyons les volumes de base et limitons-nous à un peu de géométrie.

La figure 5 montre comment s'ordonnent les volumes en fonction du coefficient de forme. La calotte sphérique est donc la morphologie la plus intéressante, la sphère étant pénalisée par l'absence de surface en contact avec le sol.

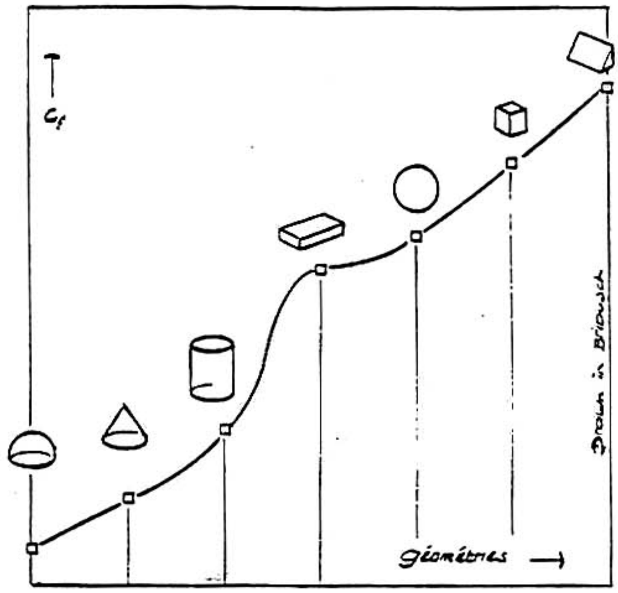


Fig. 5. — Variation du coefficient de forme C_f avec la morphologie, à volume constant.

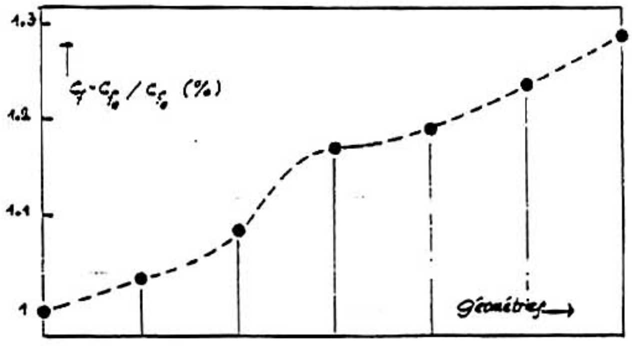
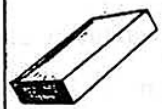


Fig. 6. — Pourcentage de majoration du coefficient de forme pour les morphologies de la fig. 5.

Les différences entre valeurs C_f ne sont pas toujours négligeables et un choix sur la géométrie devra tenir compte de tels résultats.

RÉCAPITULATIF

Volume	obs	Expression de S_E	Valeur de S_E pour $V = 1\,260\ m^3$
		$\sqrt[3]{36\pi V^2}$	$564\ m^2$
		$5\sqrt[3]{V^2}$	$583\ m^2$
	$h = 3R/2$	$4.06\sqrt[3]{V^2}$	$474\ m^2$
	$L = l = \sqrt[3]{2V}$ $h = L/2$	$h(2L + 2l) + L.l$	$555\ m^2$
	$h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ $R = \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$	$\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$	$489\ m^2$
		S_E est calculée pour $C_{f,\min} = .48$	$606\ m^2$
	$h = R$	$2\pi Rh + \pi R^2$	$512\ m^2$